CAPÍTULO 1

Una introducción a la resolución de problemas

Problema preliminar

Hay tres platos de fruta en un estante tan alto que no los puedes ver. Un plato contiene sólo manzanas, otro plato contiene sólo naranjas y otro plato contiene manzanas y naranjas. Cada plato tiene visible uno de los siguientes rótulos: MANZANAS, NARANJAS, o MANZANAS Y NARANJAS. Sin embargo, cada plato tiene el rótulo equivocado. Tu misión es seleccionar un plato, alcanzarlo y tomar una fruta. Al hacer esto y con la información anterior, ¿puedes rotular correctamente cada plato? Explica tu respuesta.

Resolver problemas se ha reconocido, desde hace mucho tiempo, como una característica relevante de las matemáticas. ¿Qué significa *resolver problemas*? George Pólya (1887–1985), uno de los más grandes matemáticos y maestros del siglo xx, señaló que "resolver un problema significa hallar una manera de superar una dificultad, o rodear un obstáculo, para lograr un objetivo que no podía obtenerse de inmediato" (Pólya 1981, p. ix).

En los *Principles and Standards for School Mathematics PSSM* (Principios y objetivos para matemáticas escolares), publicado por el NCTM, National Council of Teachers of Mathematics (Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas) de Estados Unidos en el año 2000, se afirma que:

> Resolver un problema significa emprender una tarea para la cual no se conoce de antemano el método de solución. Para encontrar una solución, los estudiantes deben producir conocimiento, y en ese proceso desarrollarán una mayor comprensión matemática. Resolver problemas no es sólo un objetivo de aprender matemáticas, sino el mejor medio de hacerlo. Los estudiantes deberán tener oportunidades frecuentes para formular, enfrentar y resolver problemas complejos que requieran una cantidad significativa de esfuerzo, lo cual se plasmará en una mayor capacidad de razonar. (p. 52)

Más aún, hallamos que

> Los programas desde preescolar hasta el grado 12 capacitarán a los estudiantes para:
> - crear nuevo conocimiento matemático mediante la resolución de problemas;
> - resolver problemas que surjan en matemáticas y en otros contextos;
> - aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas;
> - revisar y meditar acerca del proceso de resolución matemática de problemas. (p. 52)

Los estudiantes aprenden matemáticas como resultado de resolver problemas. Los ejercicios, que son las prácticas rutinarias para adquirir habilidades tienen un propósito en el aprendizaje de las matemáticas, pero la resolución de problemas debe ser el centro de atención de las matemáticas escolares. Como se señala en la *Nota de investigación*, una cantidad razonable de tensión e incomodidad mejora el desempeño de los estudiantes para resolver problemas. Tu experiencia matemática te ayudará a identificar cuándo una situación es un *problema* o cuándo se trata de un *ejercicio*.

Nota de investigación Una cantidad razonable de tensión e incomodidad mejora el desempeño de los estudiantes para resolver problemas. La motivación es deshacerse de la tensión una vez resuelto el problema. Si no está presente la tensión, el problema es un *ejercicio* o los estudiantes "generalmente no tienen el deseo de atacar el problema con seriedad" (Bloom y Broder 1950; McLeod 1985). ♦

La experiencia matemática de los estudiantes de nivel elemental deberá alimentarse con problemas interesantes, que valgan la pena, no sólo con problemas de rutina. Para involucrar a los estudiantes en tareas que valgan la pena, los problemas deben estar inmersos en un contexto familiar o conocido, como se ve en la tira cómica.

La buena experiencia de resolver problemas matemáticos ocurre cuando se da lo siguiente:

1. Se presenta a los estudiantes una situación que comprenden, pero ignoran cómo proceder directamente para obtener una solución.
2. Los estudiantes están interesados en obtener la solución y lo intentan.
3. Los estudiantes deben usar ideas matemáticas para resolver el problema.

En este libro de texto tendrás múltiples oportunidades para resolver problemas. Cada capítulo comienza con un problema que puede resolverse usando los conceptos desarrollados en ese capítulo. Al final de cada capítulo se da una sugerencia para la solución del problema. A lo largo del texto se encuentran numerosos problemas resueltos por el procedimiento de los cuatro pasos y otros resueltos por medio de diferentes formatos.

Nota de investigación

Los estudiantes que explican sus soluciones a otros estudiantes, principalmente si están en desacuerdo, obtendrán una mejor comprensión matemática. El análisis de los diferentes puntos de vista es parte importante del aprendizaje. Así se aprende el lenguaje matemático y se valora la necesidad de precisión en el lenguaje (Hatano e Ingaki 1991). ♦

Como lo indica la *Nota de investigación*, trabajar con otros estudiantes para resolver problemas mejora tanto tu capacidad para solucionarlos como tus habilidades de comunicación. Recomendamos el *aprendizaje colectivo* y sugerimos a los estudiantes que trabajen en grupo lo más posible. Para impulsar el trabajo en grupo e identificar cuándo conviene usar el aprendizaje colectivo, hemos ubicado actividades donde puede ser útil contar con varias personas para recolectar datos, o el problema puede ser tal que la discusión en grupo conduzca a encontrar estrategias para resolver el problema.

1-1 Matemáticas y resolución de problemas

Si enfocas la resolución de problemas de una sola manera, corres el riesgo de emplear ideas preconcebidas. Por ejemplo, deletrea la palabra *ropa* tres veces en voz alta: "¡R-O-P-A! ¡R-O-P-A! ¡R-O-P-A!" Ahora responde la pregunta: "¿Qué haces cuando llegas a un semáforo en verde?" Escribe tu respuesta. Si respondiste "Paro", se te puede acusar de tener una idea preconcebida. Uno no para con la luz *verde*.

Considera el siguiente problema: "Un pastor tenía 36 ovejas. Todas murieron, excepto 10. ¿Cuántas quedaron vivas?" ¿Tu respuesta fue "10"? Si así fue, ya estás entendiendo y estás preparado para intentar resolver algunos problemas. Si tu respuesta no fue "10", entonces no entendiste la pregunta. El primer paso en el proceso de cuatro pasos desarrollado por George Polya es *entender el problema*. Usar el proceso de cuatro pasos para resolver problemas no garantiza que hallemos la solución, sino que nos proporciona una manera sistemática de atacarlos.

Nota histórica

George Pólya (1887–1985) nació en Hungría y recibió su doctorado en la Universidad de Budapest. Se mudó a Estados Unidos en 1940 y, después de una breve estancia en la Universidad de Brown, formó parte del personal docente de la Universidad de Stanford. Además de ser un eminente matemático, se ocupó de la importancia fundamental de la educación matemática. En Standford publicó 10 libros, incluyendo *How to Solve It* (Cómo plantear y resolver problemas) (1945), que se ha traducido a 23 idiomas. ♦

Proceso de cuatro pasos para resolver problemas

1. **Entender el problema**
   - **a.** ¿Puedes enunciar el problema con tus propias palabras?
   - **b.** ¿Qué tratas de hallar o de hacer?
   - **c.** ¿Cuáles son las incógnitas?
   - **d.** ¿De qué información dispones?
   - **e.** ¿Qué información, si es el caso, falta o cuál no se necesita?
2. **Trazar un plan**

   La siguiente lista de estrategias, aunque no es completa, resulta muy útil:
   - **a.** Buscar un patrón.
   - **b.** Examinar problemas relacionados y determinar si las técnicas aplicadas para resolverlos se pueden aplicar en este caso.
   - **c.** Examinar un caso más sencillo, o un caso particular del problema, para comprender mejor la solución del problema original.
   - **d.** Hacer una tabla o lista.
   - **e.** Hacer un diagrama.
   - **f.** Plantear una ecuación.
   - **g.** Proponer y verificar.
   - **h.** Trabajar regresivamente.
   - **i.** Identificar un objetivo parcial.
   - **j.** Usar razonamiento indirecto.
   - **k.** Usar razonamiento directo.
3. **Realizar el plan**
   - **a.** Llevar a cabo la estrategia o estrategias del paso 2 y efectuar las acciones y los cálculos necesarios.
   - **b.** Verificar cada paso del plan conforme se avanza. La verificación puede ser intuitiva o una demostración formal de cada paso.
   - **c.** Llevar un registro preciso del trabajo.
4. **Revisar**
   - **a.** Verificar los resultados en el problema original. (En algunos casos se requerirá una demostración.)
   - **b.** Intepretar la solución en términos del problema original. ¿Tiene sentido tu respuesta?, ¿es razonable?, ¿responde la pregunta hecha originalmente?
   - **c.** Averiguar si hay otro método para hallar la solución.
   - **d.** Si es posible, determinar otros problemas relacionados, o más generales, para los cuales funcione la técnica usada.

¿Cuál es el papel que debería jugar el proceso de resolver problemas de Pólya en la enseñanza de las matemáticas elementales? Esto se responde en los *Principios y objetivos* de la siguiente manera:

> Una pregunta obvia es ¿Cómo deberían enseñarse estas estrategias? ¿Deberían recibir una atención explícita, y cómo deberían integrarse al currículo matemático? Como cualquier otra componente de las herramientas matemáticas, debe darse la debida importancia a la enseñanza de las estrategias si se espera que los estudiantes las aprendan. En los grados inferiores los maestros pueden ayudar a los niños a expresar, categorizar y comparar sus estrategias. La oportunidad de usar estrategias debe incluirse de manera natural en el currículo, a lo largo del contenido de las diferentes áreas. Cuando los estudiantes lleguen a los grados medios ya deberían ser hábiles para reconocer cuándo son apropiadas diversas estrategias y ser capaces de decidir cuándo y cómo usarlas. (p. 54)

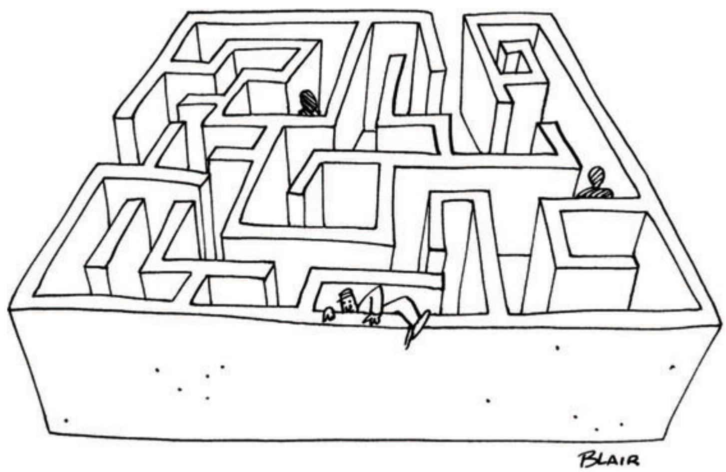
Nota de investigación

La habilidad para resolver problemas se desarrolla lentamente, quizá debido a que la comprensión y los recursos necesarios para resolver problemas se desarrollan a diferentes ritmos. Un elemento clave para desarrollar habilidades en la resolución de problemas es tener experiencia múltiple y continua para resolver problemas en diferentes contextos y con distintos niveles de dificultad (Kantowski 1981). ♦

Estrategias para resolver problemas

A continuación presentamos una variedad de problemas en diferentes contextos para que puedas obtener experiencia en resolver problemas, como se mencionó en la *Nota de investigación*. Con frecuencia es necesario emplear varias estrategias para resolver éstos y otros problemas.

Las estrategias son herramientas que puedes usar para descubrir o construir los medios que te permitan alcanzar un objetivo. Para cada estrategia descrita a continuación, damos un problema que puede resolverse usándola. Es frecuente que los problemas se puedan resolver en más de una manera, como se ilustra en la caricatura. Puedes diseñar una estrategia diferente para resolver los problemas de muestra. No existe una estrategia que sea la mejor.



SOLUCIÓN NO TRADICIONAL

Nota histórica

Carl Gauss (1777–1855) está considerado como el más grande matemático del siglo diecinueve y uno de los más prominentes de todos los tiempos. Nacido de padres pobres en Brunswick, Alemania, fue un niño prodigio; se dice que a la edad de tres años corrigió un error cometido en la contabilidad de su padre. Gauss realizó contribuciones en las áreas de astronomía, geodesia y electricidad. Después de su muerte, el rey de Hanover ordenó acuñar una medalla conmemorativa en su honor. En la medalla se inscribió la frase, referida a Gauss, de "Príncipe de las Matemáticas", título que ha permanecido junto con su nombre. ♦

Estrategia: Buscar un patrón

Resolver problemas — Problema de Gauss

Cuando Carl Gauss era niño, su maestro pidió a los alumnos que hallaran la suma de los primeros 100 números naturales, esperando así mantener a la clase ocupada un buen rato. Gauss dio la respuesta casi de inmediato. ¿Puedes hacerlo tú?

Comprender el problema Los **números naturales** son 1, 2, 3, 4, ... Así, el problema es hallar la suma $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$.

Trazar un plan Aquí es útil la estrategia *buscar un patrón*. Una versión de la historia acerca del joven Gauss dice que listó los números según se muestra en la figura 1-1.

Sea $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 98 + 99 + 100$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} S &=& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 98 + 99 + 100 \\ S &=& 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \ldots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S &=& 101 + 101 + 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

Figura 1-1

Para descubrir la suma original, Gauss dividió entre 2 la suma $2S$ de la figura 1-1.

Realizar el plan Hay 100 sumas de 101. Así, $2S = 100 \cdot 101$ y $S = \dfrac{100 \cdot 101}{2}$, ó 5050.

Revisar El método es matemáticamente correcto pues la suma se puede efectuar en cualquier orden, y la multiplicación es una suma repetida. Además, la suma en cada par siempre es 101 pues al movernos de un par al siguiente, sumamos 1 al de arriba y restamos 1 al de abajo, lo cual no cambia la suma; por ejemplo, $2 + 99 = (1 + 1) + (100 - 1) = 1 + 100$, $3 + 98 = (2 + 1) + (99 - 1) = 2 + 99 = 101$, y así sucesivamente.

Un problema más general es hallar la suma de los primeros n números naturales, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n$. Usamos el mismo plan que antes y notamos la relación en la figura 1-2. Hay n sumas de $n + 1$ que dan un total de $n(n + 1)$. Por lo tanto, $2S = n(n + 1)$ y $S = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

$$\begin{array}{rcl} S &=& 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n \\ S &=& n + (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots + 1 \\ \hline 2S &=& (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n + 1) \end{array}$$

Figura 1-2

Una estrategia diferente para hallar la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ consiste en *hacer un diagrama* y pensar la suma de manera geométrica como una pila de bloques. Para hallar la suma, considera la pila en la figura 1-3(a) y la pila del mismo tamaño pero colocada de manera diferente, como en la figura 1-3(b). El número total de bloques en la pila de la figura 1-3(b) es $n(n + 1)$, que es el doble de la suma deseada. Entonces la suma deseada es $n(n + 1)/2$.

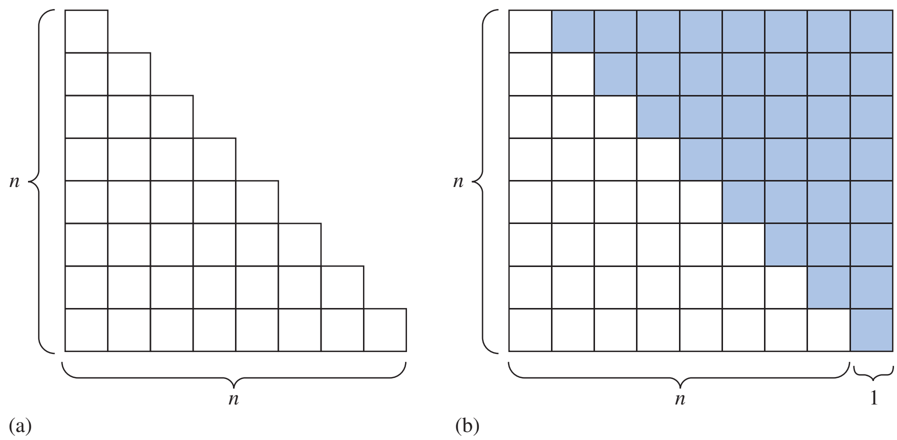


Figura 1-3

OBSERVACIÓN La suma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ se analizará de nuevo en la siguiente sección, cuando estudiemos sucesiones aritméticas.

AHORA INTENTA ÉSTE 1-1 Un corte en un tronco produce dos piezas, dos cortes producen tres piezas y tres cortes producen cuatro piezas. ¿Cuántas piezas se producen con diez cortes? Supón que los cortes se realizan de la misma manera que los tres primeros. ¿Cuántas piezas se producen con *n* cortes?

Estrategia: Examinar un problema relacionado

Resolver problemas — Suma de números naturales pares

Halla la suma de los números naturales pares menores o iguales a 100. Diseña una estrategia para hallar esa suma y generaliza el resultado.

Comprender el problema Los números naturales pares son 2, 4, 6, 8, 10, ... El problema es obtener la suma de los números naturales pares $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 100$.

Trazar un plan Reconocer que la suma se puede separar en dos partes más sencillas relacionadas con el problema original de Gauss, nos ayuda a trazar un plan. Considera lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 100 &= 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + \ldots + 2\cdot 50 \\ &= 2(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50) \end{aligned}$$

Así, podemos usar el método de Gauss para hallar la suma de los primeros 50 números naturales y después tomar el doble.

Realizar el plan Realizamos el plan como sigue:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 100 &= 2(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50) \\ &= 2 \cdot [50(50 + 1)/2] \\ &= 2550 \end{aligned}$$

Así, la suma es 2550.

Revisar Otra manera de considerar el problema es comprender que hay 25 sumas de 102, según se ve en la figura 1-4.

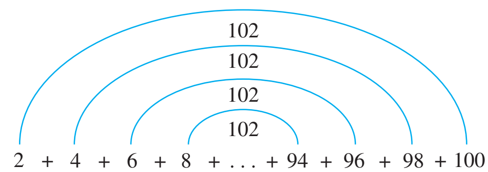


Figura 1-4

Así, la suma es $25 \cdot 102$, ó 2550.

AHORA INTENTA ÉSTE 1-2

a. Halla la suma de los números naturales impares menores que 100.

b. Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ cualquier sucesión de n términos, donde $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$, donde d es un número fijo. Escribe una expresión para la suma de los términos de esta sucesión, expresada en términos de a_1, a_n y n.

Estrategia: Examinar un caso más sencillo

Una estrategia para resolver un problema complejo es *examinar un caso más sencillo* del problema y después considerar otras partes del problema complejo. En la siguiente página se muestra un ejemplo.

AHORA INTENTA ÉSTE 1-3 Dieciséis personas participaron en un torneo de frontenis de todos contra todos, es decir, cada persona juega contra cada uno de los otros participantes. ¿Cuántos partidos se jugaron?

Estrategia: Hacer una tabla

Una estrategia que se usa a menudo en la escuela primaria es *hacer una tabla*. Se puede usar una tabla para buscar patrones que emerjan en el problema y que a su vez puedan conducirnos a una solución. En la página 10 vemos un ejemplo de esta estrategia. ¿Realmente el Plan II paga $128?

AHORA INTENTA ÉSTE 1-4 Mónica y Carla se iniciaron en un nuevo empleo el mismo día. Después de comenzar, Mónica debe visitar la oficina central cada 15 días y Carla debe ir a la oficina central cada 18 días. ¿Cuántos días van a transcurrir antes de que vayan el mismo día a la oficina central?